Teoria Evolutionista a Jocurilor cu Aplicatii in Modele de Concurenta Oligopolistica

Marius Ochea (THEMA, Université de Cergy-Pontoise)

Timisoara, 27 Aprilie 2016

Teoria clasica (rationala) a jocurilor

- modelare matematica a procesului de luare a deciziilor de catre jucatori rationali intr-un mediu interactiv (strategic)
- rationalitate: anticipatii 'rationale' asupra comportamentul adversarului+reactie optimala la aceste anticipatii
    1. anticipatii rationale: anticipatii care se dovedesc *corecte* in echilibru
    2. reactie optimala: alegerea strategiei (ilor) care maximizeaza functia de castig (utilitate/profit) pornind de la anticipatii formate rational
- echilibrul Nash: un profil de strategii in care fiecare jucator alege un "cel mai bun raspuns" (best-reply) tinand cont de anticiparea corecta a strategiei oponentului

Exemplu: joc de coordonare

I / II	**T**	**M**	**B**
T	$1-\varepsilon, 1-\varepsilon$	$0, 0$	$0, 0$
M	$0, 0$	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$0, 0$	$1+\varepsilon, 1+\varepsilon$

$, \varepsilon \in (0, 1)$

3 echilibre Nash (in strategii pure): (T,T), (M,M), (B,B)

Anticipatii rationale

- fiecare jucator are aceleasi informatii despre joc (strategii, functii de castig, etc) cu cele cunoscute/obtinute prin deductie logica de un teoretician al jocului
- in particular, fiecare jucator actioneaza strategic: cunoasterea/anticiparea comportamentului adversarului este incorporata *explicit* in analiza jocului si luarea deciziei
- implicatie: cunoasterea *comuna* a rationalitatii adversarului (common knowledge of rationality)
    - fiecare jucator stie ca fiecare jucator stie ca....ad infinitum... ca fiecare jucator este rational

Rationalitate limitata

- constrangeri cognitive, informationale, de calcul in analiza unei interactiuni strategice
- relaxarea presupozitiei legate de anticipatiile rationale

Cum ajung jucatorii sa anticipeze corect comportamentul adversarului?

- anticipatii/heuristici adaptative
  1. anticipatii naive/miopice: strategia aleasa de adversar intr-un joc anterior ca estimator ptr actiunea curenta
  2. joc 'fictiv' (fictitious play): distributia *istorica* a strategiilor adversarului ca predictor ptr strategia curenta
  3. joc imitativ: copierea unei strategii care a avut succes in trecut/intr-o interactiune similara

Rationalitate limitata

- utilizarea iterativa a acestor heuristici genereaza procese evolutive in care comportamentul jucatorilor se modifica permanent
- dinamica evolutiva a jocului (evolutionary game dynamics)
- intrebari standard in teoria evolutionista a jocurilor:
  1. convergenta procesului evolutiv?
  2. stabilitatea punctelor de convergenta?
  3. convergenta catre echilibrele Nash?
  4. alti atractori non-Nash: oscilatii (limit cycles), comportament haotic (strange attractors)

Teoria evolutionista a jocurilor

- studiaza evolutia strategiilor in cadrul unei populatii de agenti decizionali dotati cu rationalitate limitata
- selectie Darwiniana: strategiile cu utilitate/ castig relativ ridicate in prezent tind sa se raspandeasca in interiorul populatiei
- specificatia explicita a acestui proces de selectie: dinamica evolutionista
- tema centrala: care este legatura dintre limita acestui proces si conceptele "statice" din teoria rationala a jocurilor (ex. Nash)?
- fundamente evolutioniste ale conceptelor de echilibru derivate din postulatele rationalitatii

Dinamici evolutioniste ale jocurilor: model general

Interactiuni binare in cadrul unei populatii (largi) de jucatori

- un set finit de strategii pure: $I := \{1, ..., N\}$
- matricea de castiguri: $A[n \times n]$
- $x_i(t)$: frecventa strategiei i la momentul t
- $\mathbf{x}(\mathbf{t}) := x_i(t)_{i \in I}$: structura populatiei la momentul t
- $\mathbf{x}$ apartine simplex-ului $\Delta^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$
- castigul *anticipat* al strategiei i in cadrul populatiei: $f_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax})_i$
- $f(\mathbf{x})$: vectorul functiilor de castig

Dinamici evolutioniste ale jocurilor: protocol de revizuire

- evolutia in timp a frecventei strategiei i :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) = \text{influx in strategia } i \text{ - eflux din } i \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \rho_{ji}(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - x_i \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \end{aligned}$$

- $\rho_{ij}(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) :=$ protocol de revizuire (Sandholm, 2006)
- pentru fiecare pereche de strategii (i, j) defineste rata de comutare (ρ_{ij}) de la strategia i (jucata in prezent) la strategia alternativa j

Dinamica replicativa (Replicator Dynamics)

- daca fiecare jucator utilizeaza protocolul de revizuire *imitativ*:

$$\rho_{ij}(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = x_j[f_j(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x})]_+$$

- la nivelul populatiei, se obtine Dinamica Replicativa (Taylor and Jonker, 1978) larg utilizata in biologia evolutionista:

$$\dot{x}_i = x_i[f_i(\mathbf{x}) - \bar{f}(\mathbf{x})] = x_i[(A\mathbf{x})_i - \mathbf{xAx}]$$

- model formal al selectiei Darwiniene...

Dinamica Raspuns-Optim (Best-Response Dynamics)

- un jucator observa distributia prezenta a strategiilor in populatie $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ apoi calculeaza cel mai bun raspuns $\mathbf{y}$ - in strategie pura sau mixta - la aceasta distributie:

$$BR(\mathbf{x}) = \arg\max_{\mathbf{y}} \mathbf{y} f(\mathbf{x})$$

- dinamica best-reply:

$$\dot{x}_i = BR(\mathbf{x}) - x_i$$

- comportament miopic, deoarece *fiecare* jucator urmeaza aceasta procedura de revizuire a strategiei iar distributia reala a populatiei nu este $\mathbf{x}(\mathbf{t})$!

Dinamica Logit (Perturbed Best-Reply Dynamics)

- probabilitatea de modificare a strategiei curente j in alternativa i este data de protocolul *logit*:

$$\rho_{ji} = \frac{\exp[\beta A\mathbf{x})_i]}{\sum_k \exp[\beta A\mathbf{x})_k]}$$

- $\beta-$parametru care denota intensitatea selectiei
- la nivelul populatie, dinamica logit:

$$\dot{x}_i = \frac{\exp[\beta A\mathbf{x})_i]}{\sum_k \exp[\beta A\mathbf{x})_k]} - x_i$$

Exemplu I: joc de coordonare 3x3

$$A = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \varepsilon \in (0,1)$$

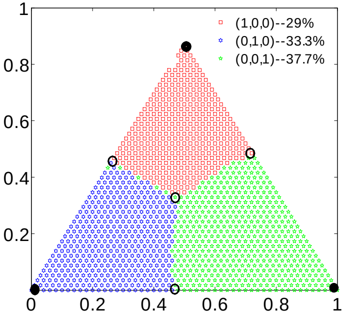
1. dinamica replicator:

$$\dot{x}_i = x_i[(Ax)_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}], i = 1..3$$

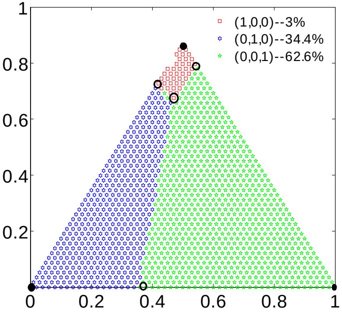
2. dinamica logit:

$$\dot{x}_i = \frac{\exp[\beta A\mathbf{x})_i]}{\sum_k \exp[\beta A\mathbf{x})_k]} - x_i, i = 1...3$$

joc de coordonare 3x3 + replicator

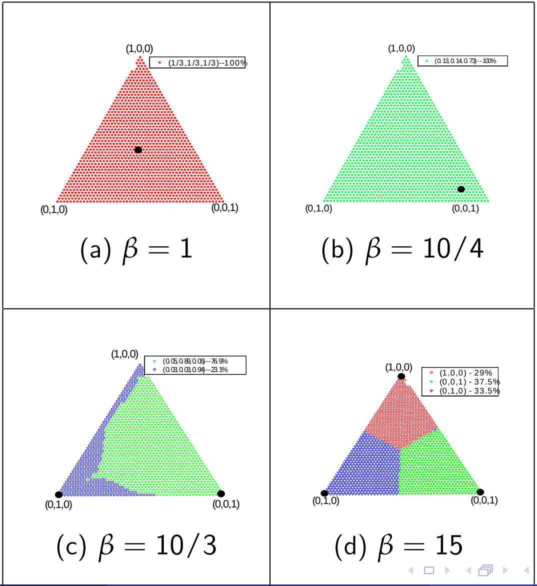


(a) $A_\varepsilon[\varepsilon = 0.1]$

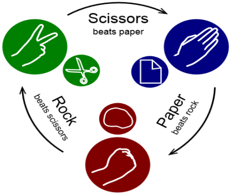


(b) $A_\varepsilon[\varepsilon = 0.8]$

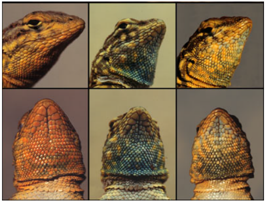
joc de coordonare 3x3 + logit



Exemplu II: Jocuri de Dominare Ciclica



rock-scissors-paper



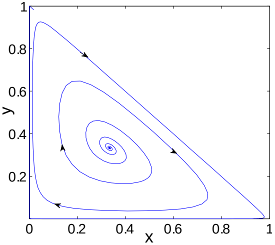
side-blotched lizards: orange, blue, yellow

Matricea jocului:

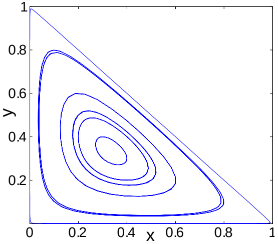
	P	F	H
P	$0, 0$	$\delta, -\varepsilon$	$-\varepsilon, \delta$
F	$-\varepsilon, \delta$	$0, 0$	$\delta, -\varepsilon$
H	$\delta, -\varepsilon$	$-\varepsilon, \delta$	$0, 0$

; $\delta, \varepsilon \geq 0$

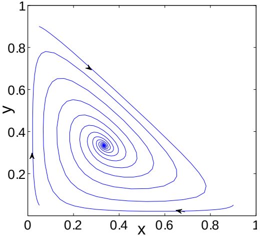
Exemplu II: PFH+replicator



(a) Unstable focus, $\delta = 0.6, \varepsilon = 1$

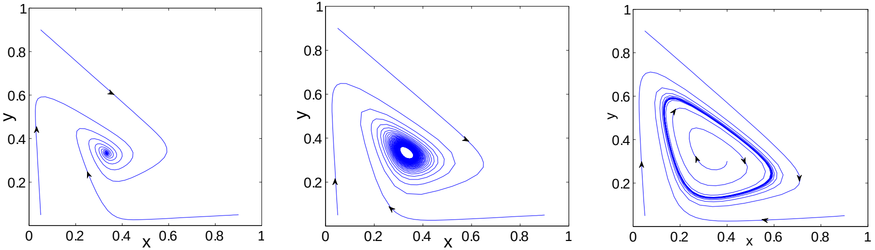


(b) Degenerate Hopf, $\delta = 1, \varepsilon = 1$



(c) Stable focus, $\delta = 1.1, \varepsilon = 1$

Exemplu II: PFH+logit



(a) Stable focus, $\delta = 1$ (b) Hopf, $\delta = 0.399$ (c) Limit cycle, $\delta = 0.1$

$\varepsilon = 1, \beta = 10$

Exemplu III: Modele de Concurenta Oligopolistica

Oligopol Cournot (competitie prin cantitate): stabilitatea echilibrului Cournot-Nash investigata din diferite unghiuri:

- numarul de firme: Theocharis (1960)
- heuristici de decizie/ajustare: best-reply, gradient
- anticipatii: rationale, adaptative, naive, tip joc fictiv, etc
- functii de cerere si cost ne-lineare
- heuristici heterogene: competitie evolutiva intre heuristici pe performanta individuala a fiecareia

Exemplu III: Oligopolul Cournot

- oligopol Cournot cu functii de cerere si cost generale
- heuristici introspective vs. heuristici adaptative
- existenta si nivelul pragului de instabilitate al echilibrului Cournot depind de setul de reguli de ajustare/invatare si de costul asociat fiecareia
- prezenta jucatorilor rationali tinde sa stabilizeze dinamica
- "doi sunt prea putini, trei sunt prea multi" (Theocharis, 1960): un caz special ptr modelul de oligopol cu functii de cerere si cost liniare si heuristici omogene

Structura

- un model de oligopol Cournot cu numar arbitrar n de jucatori si functii de cerere si cost generale
- procese de ajustare/invatare cu memorie scurta
- competitia evolutiva dintre procese de ajustare/invatare
- simulari
  1. jucatori rationali vs. jucatori "best-reply"
  2. rationali vs. best reply vs. imitativi

Original Cournot analysis

- produs omogen, oligopol Cournot cu n firme
- functia de cerere inversa $P(Q)$: cont. dif. $P(Q) \geq 0, P'(Q) \leq 0$
- cantitate totala produsa $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$, q_i este productia firmei i
- functia de cost $C(q_i)$: $C(q_i) \geq 0\,, C'(q_i) \geq 0$
- conditia de optim ptr firma i:

$$P(Q_{-i} + q_i) + q_i P'(Q_{-i} + q_i) - C'(q_i) = 0$$

- functia/corespondenta de reactie a firmei i: $q_i = R(Q_{-i}), i = 1, n$
- in echilibrul Nash simetric q^*,productia totala este $Q^* = nq^*$

Procese de ajustare/invatare

- cum invata firma *i* sa produca echilibrul q^*?
- in particular, care sunt estimarile firmei *i* despre cantitatea totala produsa de concurenti Q^e_{-i} *la momentul* cand trebuie sa ia decizia de productie?
- sistem dinamic: $q_i(t) = R(Q^e_{-i}(t)), i = 1, n$ cu panta:

$$R'(Q_{-i}) = -\frac{P'(Q) + q_i P''(Q)}{2P'(Q) + q_i P''(Q) - C''(q_i)}.$$

- puncte fixe: existenta, unicitate, stabilitate

Procese de ajustare/invatare

- joc rational/anticipatii rationale:

$$Q^e_{-i}(t) = Q_{-i}(t).$$

- joc 'fictiv':

$$Q^e_{-i}(t) = \frac{1}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} Q_{-i}(k), t \geq 2.$$

- anticipatii adaptative:

$$Q^e_{-i}(t) = \alpha Q^e_{-i}(t-1) + (1-\alpha) Q_{-i}(t-1), \alpha \in [0, 1]$$

- anticipatii "naive" (utilizate de A. Cournot, 1938):

$$Q^e_{-i}(t) = Q_{-i}(t-1)$$

.

Un proces general de ajustare adaptativ

- decizia firmei *i* asupra productie *curente* depinde de cantitatea produsa in perioada *imediat anterioara* si de cantitatea agregata produsa de concurenti Q_{-i} in perioada anterioara:

$$q_{i,t} = F\left(q_{i,t-1}, Q_{-i,t-1}\right).$$

- restrictii pentru functia $F(\cdot)$
  1. $F\left(q^*, (n-1)\, q^*\right) = q^*$
  2. $\left|F_q^*\right| < 1,\ F_Q^* \in (-1, -\delta)$, unde $\delta > 0$ este o constanta strict pozitiva
  3. $F_q^* - F_Q^* < 1$

Un proces general de ajustare adaptativ

- dinamica de tip "raspuns optim" (*best-reply* dynamics):

$$F(q, Q_{-i}) = R(Q_{-i}).$$

- dinamica "raspuns-optim" adaptativ (*adaptive best-reply* dynamics):

$$F(q, Q_{-i}) = \alpha R(Q_{-i}) + (1-\alpha) q_i, \alpha \in (0, 1]$$

- model de invatare de tip gradient (*gradient* learning):

$$F(q_i, Q_{-i}) = q_i + \lambda \frac{\partial \pi(q_i, Q_{-i})}{\partial q_i},$$

- alte procese de invatare: imita-comportamentul mediu, imita comportamentul de succes, etc.

Stabilitatea echilibrului Cournot cu ajustari omogene

Propozitia 1 *Daca toata firmele utilizeaza procesul de ajustare $F(\cdot)$ echilibrul simetric Cournot-Nash $(q^*, \ldots, q^*)$ este stabil (local) daca:*

$$\left| F_q^* + (n-1) F_Q^* \right| < 1.$$

Pentru un numar de firme n suficient de ridicat, echilibrul Cournot-Nash devine instabil sub procesul $F(\cdot)$).

Ajustari omogene: prag de instabilitate

- proposition 1 ne releva imediat structura de piata/numarul de competitori ptr care echilibrul Counot isi pierde stabilitatea:

$$n > 1 - \frac{1 + F_q^*}{F_Q^*}$$

- intuitie: proces de ajustare "miopic": in momentul deciziei nivelului productiei pe baza productiei anterioare a adversarilor, un jucator individual nu tine seama de faptul ca toti acesti concurenti isi vor revizui la randul lor decizia de productie

- example, functii de cerere si cost lineare, ajustari de tip raspuns-optim: $n = 3$
  - panta functiei de reactie: $F_Q^* = -\frac{1}{2}$
  - o deviatie de o unitate suplimentara a unei firme de la cantitatea de echilibru, atrage scaderea productiei cu 1/2 din partea fiecarui concurent.

Ajustari heterogene: competitia intre procese de ajustare

- modelarea oligopolului Cournot sub forma unui joc evolutionist
- considera o populatia mare de firme din care, in fiecare perioada, n firme sunt selectate aleatoriu ptr a forma un oligopol Cournot cu n jucatori
- firmele pot utiliza procese de invatare diferite si le pot schimba pe baza performantei fiecarei reguli de invatare
- interactiunea dintre jocul rational si un proces de ajustare cu memorie scurta de tip $F()$
- $\rho_t \in [0, 1]$ denota proportia jucatorilor rationali in populatia de firme: $1 - \rho_t$ este ponderea firmelor F

Joc rational

- un jucator rational cunoaste ponderea ρ_t jucatorilor rationali in totalul populatiei, decizia de productie a jucatorilor care utilizeara procesul de invatare $F()$ dar nu cunoaste compozitia exacta a fiecarui oligopol la care participa
- astfel, construieste anticipatii asupra tututor realizarilor posibile ale acestui proces de selectie de n jucatori din intreaga populatie
- un jucator rational i alege cantitatea q_i care maximizeaza:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \rho_t^k \left(1-\rho_t\right)^{n-1-k} \left[P\left(\left(n-1-k\right) q_t + kq^r + q_i\right) q_i - C\left(q_i\right)\right]$$

- conditia de optim:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \rho_t^k \left(1-\rho_t\right)^{n-1-k} \times \left[P\left(\left(n-1-k\right) q_t + (k+1)q^r\right) + \right.$$
$$\left. + q^r P'\left(\left(n-1-k\right) q_t + (k+1)q^r\right) - C'\left(q^r\right)\right] = 0$$

Joc rational

- solutia $q_i^* \equiv H(q_t, \rho_t)$ este caracterizata de egalitatea intre venitul marginal *anticipat* si costul marginal
- in echilibrul simetric toti jucatorii rationali produc $q^r = q_i^*$
- proprietati ale functiei de raspuns optimal $H(q_t, \rho_t)$:

$$\begin{aligned} H\left(q^*, \rho_t\right) &= q^*, (\forall)\rho_t \\ H\left(q_t, 1\right) &= q^* \\ H\left(q_t, 0\right) &= R\left(\left(n-1\right) q_t\right) \end{aligned}$$

Firme rationale vs. firme F()

- prin contrast, la momentul t jucatorii $F()$ dispun doar de informatia asupra cantitatii medii "jucate" $\overline{q}_{t-1}$ si a structurii populatiei ρ_{t-1} la momentul $t-1$:

$$q_t = F\left(q_{t-1}, (n-1)\left(\rho_{t-1} H\left(q_{t-1}, \rho_t\right) + \left(1-\rho_{t-1}\right) q_{t-1}\right)\right)$$

- rezultatul competitiei dintre cele doua modele de ajustare este determinat de profiturile generate de cele doua procese Π_i, $i = R, F$
- deoarece intensitatea informationala/cognitiva/etc. a procedurii rationale este superioara celei a procesului miopic de ajustare vom permite costuri diferentiale de *informare* sau *deliberare* $\kappa_R, \kappa_F \geq 0$
- astfel performanta fiecarei proceduri de decizie este data de

$$V_i = \Pi_i - \kappa_i, i = R, F$$

Firme rationale vs. firme F()

- performanta fiecarei heuristici este data de

$$V_i = \Pi_i - \kappa_i, i = R, F$$

- proportia jucatori rationali ρ_t evolueaza in cf. cu o dinamica monotona de selectie $G(\cdot)$

$$\rho_t = G\left(V_{R,t-1} - V_{F,t-1}\right) = G\left(\Pi_{R,t-1} - \Pi_{F,t-1} - \kappa\right), \kappa \equiv \kappa_R - \kappa_F$$

- unde functia $G(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ este cont. dif si monoton crescatoare
- $G(0) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} G(x) = 1$

Firme rationale vs. firme F()

- evolutia cantitatilor produse si a proportiilor este guvernata de urmatorul sistem dinamic bidimensional:

$$\begin{aligned} q_t &= F\left(q_{t-1}, (n-1)\left(\rho_{t-1} H\left(q_{t-1}, \rho_t\right) + \left(1-\rho_{t-1}\right) q_{t-1}\right)\right) \\ \rho_t &= G\left(V_{R,t-1} - V_{F,t-1}\right) = G\left(\Pi_{R,t-1} - \Pi_{F,t-1} - \kappa\right) \end{aligned}$$

- $\kappa \equiv \kappa_R - \kappa_F$
- punct fix: $\left(q^*, \rho_\kappa\right)$
  - unde q^* este cantitatea de echilibru Cournot-Nash
  - $\rho_\kappa = G(-\kappa)$ proportia de echilibru a jucatorilor rationali

Firme rationale vs. firme F()

Propozitie 2 *Echilibrul* (q^*, ρ_κ) *modelului de competitie evolutionista intre jucatori rationali si jucatori adaptativi* $F()$ *este stabil (local) daca:*

$$\frac{n - \rho_\kappa (n-1)\left[1 + R'\left(Q^*_{-i}\right)\right]}{1 - \rho_\kappa (n-1) R'\left(Q^*_{-i}\right)} < 1 - \frac{1 + F^*_q}{F^*_Q}$$

- prezenta jucatorilor rationali intr-o populatie de jucatori adaptativi are un efect stabilizator asupra echilibrului Cournot...
- ...dar situatii de instabilitate sunt posibile pentru structuri de oligopol cu un nr. mai ridicat de jucatori

Ilustratie: jucatori rationali vs. jucatori "best-reply"

- un model cu selectie endogena a heuristicilor de decizie in care jucatorii $F()$ utilizeaza procesul dinamic tip "raspuns-optim":

$$F\left(q_i, Q_{-i}\right) = R\left(Q_{-i}\right)$$

- prin aplicarea directa a Prop. 2 la cazul specific in care jucatori $F()$ sunt de tip best-reply ($F_q^* = 0$ si$F_Q^* = R'\left(Q_{-i}^*\right) < 0$) obtinem:

Corolar *Echilibrul* $\left(q^*, \rho_\kappa\right)$ *modelului cu selectie endogena intre jucatori rationali si jucatori best-reply este stabil (local) daca:*

$$\left(1 - 2\rho_\kappa\right)\left(n-1\right) R'\left(Q_{-i}^*\right) > -1.$$

In absenta diferentelor intre costurile informationale asociate celor doua heuristici , $\kappa = 0$*, echilibrul* $\left(q^*, \rho_0\right)$ *este stabil local ptr toate structurile de oligopol, i.e.* $(\forall) n \geq 2$.

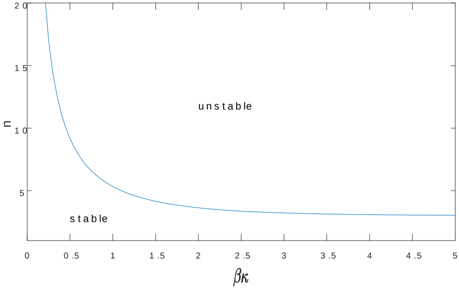
Jucatori rationali vs. jucatori "best-reply": dinamica globala

- functie de cerere inversa lineara: $P(Q) = a - bQ$, $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$
- costuri productie lineare: $C_i(q_i) = cq_i$, $i \in \{1, n\}$
- functia de reactie: $q_i = R_i\left(Q_{-i}\right) = q^* - \frac{1}{2}\left(Q_{-i} - (n-1)\, q^*\right)$,
- $q^* = \frac{a-c}{b(n+1)}$ echilibru Cournot-Nash unic
- competitia evolutionista intre reguli modelata cu ajutorul procesului dinamic logit :

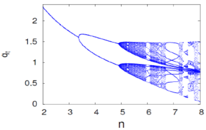
$$G\left(\Pi_{R,t-1} - \Pi_{F,t-1} - \kappa\right) = \frac{1}{1 + \exp\left[-\beta\left(\Pi_{R,t-1} - \Pi_{F,t-1} - \kappa\right)\right]}.$$

- $\beta \geq 0$ intensitatea selectiei evolutioniste

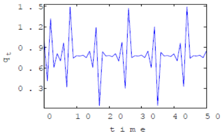
Jucatori rationali vs. jucatori "best-reply": dinamica globala



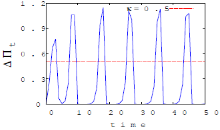
Jucatori rationali vs. jucatori "best-reply"



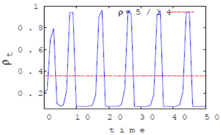
(a) Bifurcation diagram (q_t, n)



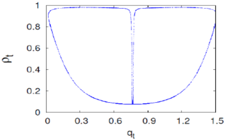
(b) Best-reply firms' play



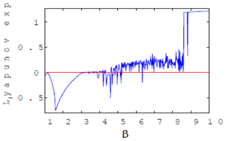
(c) Rational profits differential



(d) Rational play share

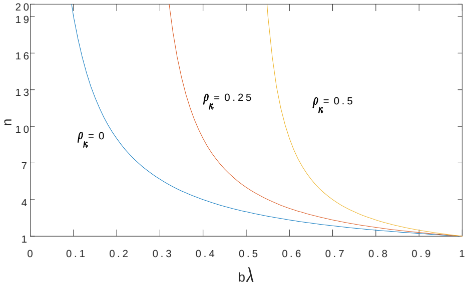


(e) Phase plot $(q_t, \rho_t), n = 8$



(f) Largest Lyapunov exp.

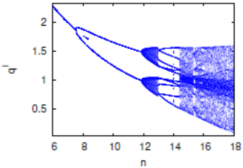
Joc rational vs heuristica gradient: dinamica globala



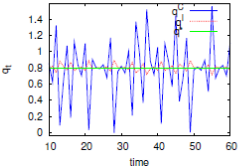
Jucatori rationali vs. jucatori "best-reply" vs. imitatori

$$
\begin{aligned}
q^R_{t+1} &= H^R(q^C_{t+1}, q^I_{t+1}, \eta^R_{t+1}, \eta^C_{t+1}) \\
q^C_{t+1} &= R((n-1)(\eta^R_t q^R_t + \eta^C_t q^C_t + (1-\eta^R_t - \eta^C_t) q^I_t) \\
q^I_{t+1} &= \eta^R_t q^R_t + \eta^C_t q^C_t + (1-\eta^R_t - \eta^C_t) q^I_t \\
\eta_{R,t+1} &= K^R(\Delta U^R_t, \Delta U^C_t) \\
\eta_{C,t+1} &= K^C(\Delta U^R_t, \Delta U^C_t).
\end{aligned}
$$

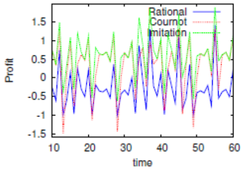
- $(\ q^*, \eta^{R*} = \frac{e^{\beta(C^C - C^R)}}{e^{\beta(C^C-C^R)}+1+e^{-\beta(C^I-C^C)}}, \ \eta^{C*} = \frac{e^{\beta(C^I-C^C)}}{e^{\beta(C^I-C^R)}+e^{-\beta(C^I-C^C)}+1})$
- Stabilitatea echilibrului determinata de:
  - $C^R > 0, C^I = C^C = 0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ and $\lambda_4(n, C^R\beta) = \frac{3e^{C^R\beta} - ne^{C^R\beta}}{n+4e^{C^R\beta}+1}$
  - nivelul critic de instabilitate: $n < \psi(C^{R*}\beta) = \frac{7e^{C^R\beta}+1}{e^{C^R\beta}-1}$
  - $C^I, C^C \neq 0$: costul relativ al heuristicii stabile (imitatie) relativ la costul heuristicii instabile (best-reply)



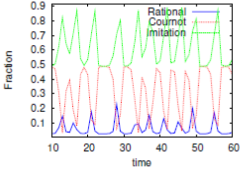
(a) Bifurcation diagram (q_t, n)



(b) Time path of Cournot and imitation quantities



(c) Cournot profit differential



(d) Time path Cournot fraction

Parametrii: $n = 19,\ a = 17,\ b = 1,\ c = 1,\ C^R = 1,\ C^C = 0,\ C^I = 0,\ \beta = 3.$

Conditii initiale: $q_0^R = 0.3,\ q_0^C = 0.1,\ q_0^I = 0.25,\ \eta_0^R = 0.5,\ \eta_0^C = 0.2.$

Concluzii

- pragul critic de instabilitate a echilibrului Cournot este monoton cu proportia jucatorilor rationali din populatie
- ptr modelul specific joc rational vs. joc best-reply echilibrul Cournot Nash este stabil indiferent de structura pietei (nr. jucatorilor) cu conditia ca predictorul rational sa fie obtinut cu cost zero
- acest resultat nu este insa generalizabil ptr alte ecologii de heuristici
    - e.g. modelul cu anticipatii rationale si heuristica tip gradient eq. CN devine instabil *chiar si in absenta costurilor informationale,* daca n este suficient de mare.
- cadrul analitic adaptabil ptr studiul altor seturi de heuristici (ex. imitatie)